Graphes super-eulériens, problèmes hamiltonicité et extrémaux dans les graphes

La théorie de graphe est une domaine très populaire et intéressante de mathématiques discrètes. La première article connue sur la théorie des graphes a été donnée par Euler E. (1736), dans laquelle qu'il a présenté le problème de sept ponts de kÄonigsberg. Dans les années récentes, la théorie des graphes s'est développée très rapidement. Il y a beaucoup de problèmes connus sur la théorie des graphes, par exemple, le problème hamiltonien, le problème de quatre couleurs, le problème de postier chinois, le problème de l'attribution optimale etc. Par ailleurs, la théorie des graphes a des grandes applications à des problèmes pratiques, tels que la chimie, la biologie,l'informatique, réseaux de communication.

Dans cette thèse, nous concentrons sur les sujets suivants : les graphes super-eulériens, hamiltonien ligne graphes, le tolérants aux pannes hamiltonien laceabilité de Cayley graphe généré par des transposition arbres et plusieurs problèmes extrémaux concernant la (minimum et/ou maximum) taille des graphes qui ont la même propriété.

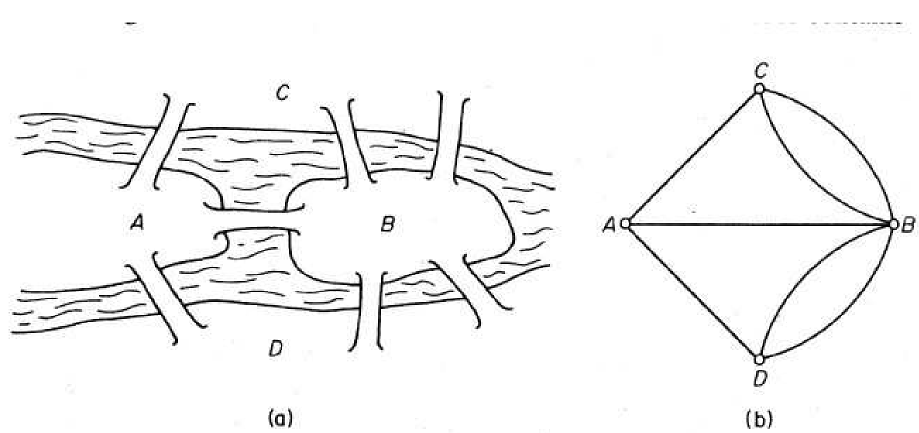
Un *graphe* G est un triplet $(V(G), E(G), \psi_G)$ ordonné comprenant d'un ensemble non vide de sommets $V(G)$, un ensemble des arêtes $E(G)$ qui est disjoint de $V(G)$, et une fonction d'incidence ψ_G qui associe chaque arête de G avec une paire non ordonnées de sommets(non nécessairement distincts) de G. Si e est une arête et u et v sont des sommets tels que $\psi_G(e) = uv$, alors e est dit de rejoindre u et v ; les sommets u et v sont appelés les extrémités de e.

Les extrémités d'une arête sont dits des *incidents* de l'arête, et vice versa. Les deux sommets qui sont incidents à une arête commune sont *adjacents*, de même que les deux arêtes qui sont incidents au sommet commun. Un graphe est *simple* si il n'a pas de cycles et pas de deux de ses liens qui rejoindre la même paire de sommets. Un graphe non-simple est appelé multigraphe.

Un graphe H est un *sous-graphe* of G (écrivant $H \subseteq G$) Si $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$, et ψ_H est la restriction de ψ_G pour $E(H)$. Si H est un sous-graphe de G, G est un *super-graphe* de H. Un *sous-graphe couvrant* de G est un super-graphe H avec $V(H) = V(G)$.

Cette thèse comprend six chapitres. Le premier chapitre présente des définitions et indique la conclusion des résultats principaux de cette thèse, et dans le dernier chapitre, nous introduisons la recherche de future de la thèse. Les études principaux sont montrés dans les chapitres 2-5. Nous présentons d'abord les résultats principales de chapitre 2.

Un *parcours eulérien* est un chemin dans un graphe qui visite chaque arête exactement une fois. De même, un *circuit eulérien* ou un *parcours eulérien fermé* est un parcours eulérien qui commence et se termine au même sommet. Ils ont d'abord été étudiés par Leonhard Euler quand il veut résoudre le célèbre problème Sept Ponts de KÄoigsberg en 1736. Le problème était assez simple - la ville de KÄonigsberg compose de deux îles et sept ponts. Est-il possible, en commençant n'importe où et se terminant n'importe où, de marcher à travers la ville en traversant ces sept ponts mais pas passer un pont deux fois ?



Les sept ponts et leur graphe.

Un sommet est *impair* si son degré est impair et *pair* si son degré est pair. Un graphe est pair si tous les sommets sont pair. Un graphe est eulérien si il est connectée et pair. En 1736, L. Euler a montré le suivant.

Théorème 1. *Un parcours eulérien existe dans un graphe connexe si et seulement si il y a soit aucun sommets impairs ou deux sommets impairs.*

Un graphe est *super-eulérien* si il a un graphe eulérien couvrant. Boesch et al. en 1977 ont demandé quel est sont les graphes super-eulérien ? Pulleyblank en 1979 a montré que la détermination si un graphe planaire est super-eulérien est NP-complet. Donc, un problème naturel est sorti : quelles est les conditions pour garantir un graphe être super-eulérien ? Pour ce problème, Jaeger en 1979 a obtenu un théorème bien connu comme suivant.

Théorème 2. *Chaque 4-arête-connecté graphe est super-eulérien.*

Le reste pour le problème de graphe super-eulérien consiste à caractériser 2 et 3-arête-connecté graphe. Pour étudier ce problème, Catlin a introduit une méthode puissante. Pour un graphe G, suppose $O(G)$ donne l'ensemble des sommets impairs de G. Étant donné un sous-ensemble R de $V(G)$, un sous-graphe $Gamma$ de G est appelé un R-sou-graphe si $O(Gamma) = R$ et $G - E(Gamma)$ est connecté. Un graphe G est démontable si pour tout les sous-ensembles impairs R de $V(G)$, G a un R sous-graphe. Notez que lorsque $R = emptyset$, un sous-graphe connecté couvrant H avec $O(H) = emptyset$ est un sous-graphe eulérien couvrant de G. Ainsi, un graphe démontable est super-eulérien.

En utilisant la méthode de Catlin, Lai et Yan en 2012 ont prouvé le suivant.

Théorème 3. *Si G est un 2-arête-connecté simple graphe et $\alpha'(G) \leq 2$, G sera super-eulérien $\iff G \neq K_{2,t}$ pour certains nombres impairs t.*

Ils ont également conjecturé ce qui suit.

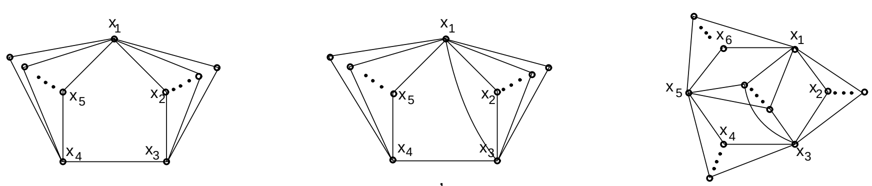
Conjecture 1. *Si G est un 2-arête-connecté simple graphe avec $\alpha'(G) \leq 3$, G se sera* *pas super-eulérien si et seulement si $G \in \{K_{2,t}, S_{n,m}, K_{1,3}(1,1,1)\}$ pour certains nombres impairs t.*

$S_{n,m}$ et $K_{1,3}(1,1,1)$

Pour répondre à leur conjecture, nous avons montré ce qui suit.

Théorème 4. *Si G est un graphe avec $\delta(G) \geq 2$ et $\alpha'(G) \leq 3$, G ne sera pas super-eulérien si et seulement si un de ces conditions suivantes satisfait :*

1. *Si $G \cong K_{2,t}$ pour certains nombres impairs t.*
2. *Si $G \cong S_{n,m}, m \geq n \geq 1$, un de n, m est un nombre pair.*
3. *Si $G \cong C_6(k; s, t, r)$, alors $k = 0$ or 1. En plus, si $k = 1$, puis les parités de s, t, r sont les mêmes, si $k = 0$, alors s, t, r sont différents.*



Sn,m   S'n,m   C6 (k;s,t,r)

Pour le 3-arête-connecté graphe, Chen et Lai in 1995 a proposé un conjecture.

Conjecture 2. *Chaque 3-arête-connecté graphe et 6-arête-connecté graphe essentiel est démontable.*

Ils ont prouvé ce qui suit.

Théorème 5. *Chaque 3-arête-connecté graphe et 7-arête-connecté graphe essentiel est démontable.*

Pour une arête e dans le graphe G, nous définissons le degré de l'arête e :

$$d(e) = d(u) + d(v) - 2.$$

En outre, le degré de l'arête minimum de graphe G est $\xi(G) = \min\{d(e)|e \ inE(G)\}$. Esfahanian en 1988 a montré ce qui suit.

Théorème 6.

$$\lambda^2(G) \leq \xi(G)$$

si G n'est pas un graphe d'étoile.

Donc, nous nous demandons si un graphe $3 - arte - connexe$ avec $xi(G) \geq 7$ est pliables ? Plusieurs résultats partiels ont été obtenus dans cette thèse.

Théorème 7.

1. *Chaque 3-arête-connexe (multi)graphe avec $\xi(G) \geq 7$, et $\lambda^3(G) \geq 7$ est pliable.*
2. *Chaque 3-arête-connexe simple graphe avec $\xi(G) \geq 7$, et $\lambda^3(G) \geq 6$ est pliable.*
3. *Chaque 3-arête-connexe (multi)graphe avec $\xi(G) \geq 6$, $\lambda^2(G) \geq 4$, et $\lambda^3(G) \geq 6$ avec au maximum 24 sommets de degré 3 est pliable.*
4. *Chaque 3-arête-connexe simple graphe avec $\xi(G) \geq 6$, et $\lambda^3(G) \geq 5$ avec au maximum 24 sommets de degré 3 est pliable.*

Nous passons ensuite au parcours eulérien de graphe. Catlin en 1988 a montré le suivant.

Théorème 8. *Pour $u, v \in V(G)$, si*

$$d(x) + d(y) \geq n$$

pour chaque arête $xy \in E(G)$,alors soit G a un parcours couvrant (u, v), ou exactement l'une des conditions suivantes est satisfaite :

1. *$d(z) = 1$ pour certains sommets $z \notin \{u, v\}$.*

2. $G = K_{2,n-2}, u = v$ *et* n *est impaire.*

3. $G = K_{2,n-2}, u \neq v, uv \in E(G)$, n *est pair, et* $d(u) = d(v) = n - 2$.

4. $u = v$, *et* u *est le seul sommet avec degré* 1 *dans le graphe* G.

Pour le théorème ci-dessus, nous essayons de réduire la borne inférieure n à $n-k$ pour quelques entiers k. Nous avons obtenu le théorème suivant.

Théorème 9. *Suppose* $p(n) = 0$ *pour* n *pair et* $p(n) = 1$ *pour* n *impaire, et suppose* $u, v \in V(G)$. *Si*

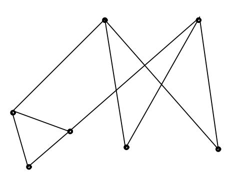
$$d(x) + d(y) \geq n - 1 - p(n)$$

pour chaque arête $xy \in E(G)$,*alors soit* G *a un parcours couvrant* (u, v), *ou exactement l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

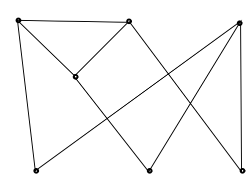
1. $G \in \{G_7, G'_7, K_{1,n-1}, K'_{2,n-3}\}$ *ou la réduction de* G *est* $K_{1,t-1}$ *pour quelque entiers* $t \geq 2$

2. $G = K_{2,n-2}, u = v$ *et* n *est impaire*

3. $G = K_{2,n-2}, u \neq v, uv \in E(G)$, n *est pair, et* $d(u) = d(v) = n - 2$



G_7



G'_7

Dans le troisième chapitre, nous examinons la l'hamiltonien de line graph. Le line graph $L(G)$ de G est le graphe avec l'ensemble de sommets $E(G)$, et deux sommets dans $L(G)$ sont adjacentes si elles ont une extrémité commune. Il y a un problème intéressant sur le line graph : Quel line graph est hamiltonien ? Thomassen en 1986 a supposé le suivant.

Conjecture 3. *Tous les 4-connexe line graph sont hamiltoniens.*

Nous notons que les line graphs sont sans-griffe. En 1984, Matthews et Sumner a posé une conjecture plus forte de contexte différent.

Conjecture 4. *Tous les 4-connexe sans-griffe graphe est hamiltoniens.*

En 1997, RYJ 'a v CEK introduit une sorte de fermeture (R-fermeture) qui tourne un graphe sans-griffe à un line graph sans changer son l'hamiltonien. Ainsi, les deux conjectures sont équivalentes. Pour ces conjectures, Zhan a reporté le théorème suivant.

Théorème 10. *Tous les 7-connexe line graph est hamiltonien-connexe.*

Utilisant R-fermeture, Ryjáček a prouvé le suivant.

Théorème 11. *Tous les 7-connexe sans-griffe graphe est hamiltonien.*

Très récemment, un progrès important vers les conjectures a été obtenu par Kaiser et Vr 'ana.

Théorème 12. *Tous les 5-connexe line graph avec le degré minimum au moins de 6 est hamiltonien.*

Utilisant R-fermeture, le suivant est satisfait.

Corollaire 1. *Tous les 5-connexe sans-griffe graphe G avec le degré minimum au moins de 6 est hamiltonien.*

Récemment, Lai et al a considéré le problème suivant : Pour un 3-connexe line graph, est-ce que la connectivité essentielle élevée peut garantir l'existence d'un cycle hamiltonien ? Ils ont prouvé les théorèmes suivants.

Théorème 13. *Tous les 3-connexe, essentielle 11-connexe line graph est hamiltonien.*

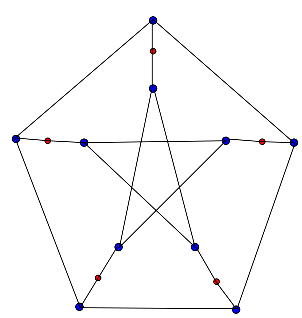
Dans le chapitre 3, nous considérons que quel est le plus petit entier k tel que chaque 3-connexe, essentiellement $k-connexe$ line graph est hamiltonien. D'abord, nous renforçons le résultat ci-dessus en montrant le théorème suivant,

Théorème 14. *Tous les 3-connexe, essentiellement 11-connexe line graph (sans-griffe) est hamiltonien connexe.*

Plus tard, en utilisant un théorème de Nash-Williams, et Tutte nous renforçons le résultat ci-dessus à nouveau.

Théorème 15. *Tous les* 3*-connexe essentiellement* 10*-connexe line graph (sans-griffe graphe) est hamiltonien connexe.*

Pour les 3-connexe line graphs, Lai et al. ont également demandé si chaque 3-connexe et essentiellement 4-connexe line graph est hamiltonien ? Nous répondons négativement ce problème en donner une famille de contre-exemples (l'un d'eux est montré dans la figure ci-dessous).



Par ailleurs, nous avons montré ce qui suit.

Théorème 16. *Suppose* $L(G)$ *est un* 3*-connexe, essentiellement* 4*-connexe line graph. Si* G *a au maximum* 10 *sommets de degré* 3*, alors soit* $L(G)$ *est hamiltonien, soit* G *est contractible au graphe Petersen.*

Nous passons ensuite au chapitre 4. L'étude principale dans cette partie est due à la stimulation de plusieurs études de chercheurs en informatique. Comme l' Graphe de Cayley est largement appliquée dans la conception de réseaux, plusieurs familles de graphes de Cayley ont été retenus beaucoup d'attention. Cayley graphe qui est généré par des arbres de transposition est l'un des importants familles.

Suppose S_n dénote le groupe symmetrique dans $\{1, \cdots, n\}$, $(p_1 p_2 \cdots p_n)$ dénote la permutation $\begin{pmatrix} 1\ 2\ \cdots n \\ p_1 p_2 \cdots p_n \end{pmatrix}$, et (ij) dénote la permutation $\begin{pmatrix} 1\ 2\ \cdots i \cdots j \cdots n \\ 1\ 2 \cdots j \cdots i \cdots n \end{pmatrix}$ (Il est obtenu en échanger le i^{th} et le j^{th} objets de $\begin{pmatrix} 1\ 2\ \cdots n \\ 1\ 2 \cdots n \end{pmatrix}$) qui est appelé une *transposition*. Il est facile d'observer que $(p_1 \cdots p_i \cdots p_j \cdots p_n)(ij) = (p_1 \cdots p_j \cdots p_i \cdots p_n)$. Suppose B être un généré ensemble minimum de S_n.Si ce généré ensemble minimum B est un ensemble de transpositions de S_n, il s'appelle *le généré ensemble minimum de transposition.*

Dans cet article, nous supposons toujours que le généré ensemble minimum est un généré ensemble minimum de transposition. Pour la commodité de la discussion, nous décrire le généré ensemble minimum de transposition B de S_n par un généré ensemble de transposition ,écrit T_B, ou l'ensemble de sommets de T_B est $\{1, 2, \cdots, n\}$, l'ensemble d'arêtes est $\{(ij)|(ij) \in B\}$. Notons que B est un généré ensemble minimum de transposition de S_n, on voit que T_B est un arbre que l'on appelle *généré arbre de transposition.*

Cayley graphe $Cay(S_n, B)$ est appelé *Cayley graphe généré par transposition généré arbre* si B est un minimum transposition généré ensemble de S_n, dénoté par G_n. Il est bien connu que G_n est appelé *star graph* et *bubble-sort graphe* si $T_B \cong K_{1,n-1}$ et $T_B \cong P_n$ (P_n est un chemin avec n sommets), respectivement.

Un bipartite graphe G est *k-tolérants aux pannes hamiltonicité laceable* si $G - F$ est hamiltonien laceable pour tous les $F \subseteq E(G)$ avec $|F| \leq k$, ou l'ensemble F est appelé *faux arte ensemble*, arêtes de F sont appelés faux arêtes, et arêtes de $E(G) - F$ sont appelés sans-faux arêtes.

Une bipartite graphe G est appelé *bipancyclic* si il comprit les cycles de tous les longueurs pairs de 4 à $|V(G)|$. Un bipartite graphe G est appelé *k-arête faux-tolérant bipancyclic* si $G - F$ reste bipancyclic pour tous les ensembles F d'arêtes avec $|F| \leq k$, ou F est appelé un *faux arte ensemble* de *faux arte.*

Li et al. en 2004 a considéré le graphe d'étoile.

Théorème 17. *Les graphes d'étoile sont $(n-3)$-arête faux tolérant hamiltonien laceable.*

Plus tard, Aeaki et Kikuchi a montré le suivant.

Théorème 18. *Le bubble-sort graphes sont $(n-3)$-arête faux tolérant hamiltonien laceable.*

Dans la Section 1 du chapitre 4, nous généralisons les résultats ci-dessus pour tous les G_n.

Théorème 19. *G_n est $(n-3)$-arête faux tolérant hamiltonien laceable.*

Foe bipancyclicity de G_n, Tseng et al. a montré le suivant.

Théorème 20. *les graphes d'étoile sont $(n-3)$-arête faux-tolérant bipancyclic (à l'exception de 6-cycle).*

Et plus tard, Kikuchi et Aeaki considère le bubble-sort graphes.

Théorème 21. *Le bubble-sort graphes sont $(n-3)$-arête faux-tolérant bipancyclic.*

Dans la Section 2 du chapitre 4, nous généralisons les résultats ci-dessus pour tous les G_n.

Théorème 22. *G_n est $(n-3)$-arête faux-tolérant bipancyclic (le graphe d'étoile est une exception).*

Déterminant la taille minimale et / ou la taille maximale des graphes ayant certaines propriétés données est un problème classique en théorie de graphe extrémal. Dans le chapitre 5, nous considérons que plusieurs de ces problèmes de graphes. En particulier, l'hypercube (n-cube) est une structure combinatoire intéressant, et il y a beaucoup de conjectures intéressantes sur hypercubes. Dans la section 1 du chapitre 5, nous considérons quelle est la taille maximum pour un sous-graphe induite de M sommets ($\frac{ex_m}{2}$) dans un n-cube ? Nous abordons ce problème.

Théorème 23.

$$ex_m = \sum_{i=0}^{s} t_i 2^{t_i} + \sum_{i=0}^{s} 2 \cdot i \cdot 2^{t_i} \text{ for } m = \sum_{i=0}^{s} 2^{t_i} \leq n$$

.

Utilisant ce théorème, nous déterminons l'extra connectivité d'arête de hypercubes et de hypercubes plié.

Théorème 24. $\lambda^m(Q_n) = nm - ex_m$ *for* $m \leq 2^{[\frac{n}{2}]}, t_i > t_{i-1}$.

Théorème 25. $\lambda^m(FQ_n) = m(n+1) - ex_m$ *for* $m \leq n$.

Dans la section 2 du chapitre 5, nous considérons quelle est la taille minimale des graphes avec l'ordre n et avec un degré minimal donné par δ et un degré d'arête minimal donné par $\xi(G) \geq 2\delta + k - 2$?

Théorème 26. *Si* G *est un graphe avec le degré minimal* $\delta \geq 3, \xi(G) \geq 2\delta + k - 2$, *alors* $|E(G)| \geq \frac{\delta(G)}{2} n + \frac{\delta k}{2(\delta+k)} d_\delta$. *En plus, la formulation reste la même si et seulement si* $d_\delta = \frac{\delta+k}{2\delta+k} \cdot n$

Dans la section 3 du chapitre 5, nous déterminons la taille minimale des graphes satisfaisants la condition Ore.

Mots Clés : Super-eulérien graphe, Hamiltonien cycle, Ligne graphe, Conjecture de Thomassen, Hypercube, Arc-connectivité, La théorie de graphe extrémal.